数理解析研究所講究録
565巻 1985年 186-196

Fredholm型確率積分方程式の解の存在と一意性について.

京都工繊大　小川重義 (OGAWA Shigeyoshi)

§1. $Z(t,\omega)$ $(0 \le t \le 1,\ \omega \in \Omega)$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値乱関数で連続な見本関数をもつものとし, $f(t,\omega)$, $L(t,s,\omega)$, $K(t,s,\omega)$ $(0 \le t, s \le 1)$ をそれぞれ適当な乱関数及び random kernels とする。さて, ヒルベルト空間 $L^2(0,1)$ における正規直交底 $\{\varphi_n\}$ が与えられたとして, 次のようなフレドホルム型確率積分方程式を考えてみる,

$$(1):\quad x(t) = f(t,\omega) + \alpha\int_0^1 L(t,s,\omega)x(s)ds + \beta\int_0^1 K(t,s,\omega)x(s)d_\varphi Z$$

$(0 \le t \le 1)$,

ここに α, β は定数であり, 項 $\int d_\varphi Z$ は与えられた組 $(Z, \{\varphi\})$ に関する非因果的確率積分 (後述, §2) を表わすものとする。

このような非因果的確率積分方程式は, 項 $\frac{d}{dt}Z(t,\omega)$

を係数とする線形微分方程式の境界値問題に対する一つの自然な解釈を与えるものと期待される（乱関数 Z がブラウン運動のように，連続ではあるが滑らかではない）見本関数を持つ場合を想定している）。本稿では方程式 (1) の或る種の解（S−解）の存在と一意性に関する二・三の結果を示し，次いで，この型の確率積分方程式と上に述べた確率微分方程式の境界値問題との関係についても言及する。尚，以下においては，乱関数は全て条件 $P[\int_0^1 |b(t,\omega)|^2 dt < +\infty]=1$ をみたす可測関数を意味するものとし，その表記においては，可能である場合にはパラメータ ω を省くことがある。また，基本的な組 $(Z, \{\varphi\})$ については，Z は "$Z(0)=0$" なる条件をみたすものとし，c.o.n.s $\{\varphi_n\}$ は各々毎に積分 $Z(\varphi_n)=\int_0^1 \overline{\varphi_n(s)}\, dZ(s)$ が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の r.v として意味をもつようにえらばれているものとする。（本稿に記す内容の詳細については [1] を参照されたい）。

§2. 準備. $\{Z_n^{\varphi}\}$ $(n \in N)$ を次で与えられる乱関数の列とする.

(2) ; $Z_n^{\varphi}(t) = \sum_{k=1}^{n} Z(\varphi_k)\int_0^t \varphi_k(s)ds \quad (0 \le t \le 1)$.

(各 Z_n^{φ} は微分可能な見本関数を持つことも注意しておこう。非因果的積分 $\int d_{\varphi}Z$ の定義を与える。

定義，(i) 極限，$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t,\omega)\,dZ_n^{\varphi}(t) \quad ((a,b)\subset[0,1])$

が確率収束の意味で存在するとき，乱関数 f は (a,b) 上で $(Z,\{\varphi\})$ に関して可積分であるといい，極限を $\int_a^b f\,d_{\varphi}Z$ と記す.

(ii) 乱関数 f は，(イ) 各 t 毎に $(0,t)$ 上で $(Z,\{\varphi\})$-可積分で (ロ) 乱関数列 $\tilde{f}_n(t) = \int_0^t f(s,\omega)\,dZ_n^{\varphi}(s)$ が $L^2(0,1)$ 内の列として $\tilde{f}(t) = \int_0^t f(s,\omega)\,d_{\varphi}Z(s)$ に確率収束するとき強い意味で可積分であるといい，このような f の全体を S で表わす。

次の方程式の S-解の存在状況を調べることから始める。

(3) ; $x(t) = f(t) + \int_0^1 K(t,s,\omega)\,x(s)\,d_{\varphi}Z(s)$.

この為，以下の仮定をおく。まず，基本的組 $(Z, \{\varphi\})$ について は，

(H.1)： $s\text{-}\lim_{n\to\infty} Z^{\varphi}_n(\cdot) = Z(\cdot)$ (in P).

(例1) Z：Brown 運動．$\{\varphi_n\}$：関数系 $e^{2\pi int}$ $(n \in \mathbb{Z})$

但し， $Z^{\varphi}_n(t) = \sum_{|k|\le n} Z(e^{2\pi ikt}) \int_0^t e^{2\pi iks} ds$

乱関数 f，L．K については次の仮定，

(H.2)： (イ) $f \in S$.

(ロ) $P[\int_0^1\int_0^1 \{|L|^2 + |L_t|^2 + |K|^2 + |K_{st}|^2\} ds dt < +\infty] = 1$.

(ここに， $L_t = \frac{\partial}{\partial t} L$， $K_{st} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} K$).

(注) 以下のような記号を使う．

① $f(t)$．$H(t.s)$ に対して， $\tilde{f}(t) = \int_0^t f(s) d_{\varphi} Z(s)$，

$\tilde{H}(t.s) = \int_0^t H(u, s) d_{\varphi} Z(u)$

② 核 $H(t.s)$，乱関数 $x(s)$ に対して，二様の一次写像：

$(Hx)(t) = \int_0^1 H(t.s) x(s) ds$

$$((Hx))(t) = \int_0^1 H(t.s)\, x(s)\, d_y Z(s),$$ がある。

③ 任意の乱関数 $x(\cdot)$ に対して，$(Hx)(t) \in S'$ であるとき，核（或いは作用素）H は S-級であるといい $H \in L(S)$ と記す。

補題　核 $H(t.s)$ が条件 $P[\int_0^1\int_0^1 \{|H|^2+|H_t|^2\} ds\,dt < +\infty] = 1$ をみたすとき，$H \in L(S)$.

この補題を使って，次の結果

命題 1.　(H.1), (H.2) の外に，$P[\tilde{K}(1.1) \neq 1] = 1$ を仮定する。このとき，方程式 (3) の S-解 x と次の通常の積分方程式 (4) の乱関数解 y とは一対一に対応する。

(4)：　$y(t) = (\mathcal{A}f)(t) + (Gy)(t)$.

ここに，

(5)　(i)　$$(\mathcal{A}f)(t) = \int_0^t (\alpha f)(u)\, d_p Z(u)$$

(ii)　$$(\alpha f)(t) = f(t) - \frac{\tilde{f}(1)\, K(t,1)}{\tilde{K}(1.1) - 1}$$

(5) -(iii) $\quad (\mathcal{G}y)(t) = \int_0^1 \tilde{g}(t,s,\omega)\, y(s)\, ds$

(iv) $\quad g(t,s,\omega) = \dfrac{K(t,1)\,\tilde{K}_s(1,s)}{\tilde{K}(1,1)-1} - K_s(t,s)$

(∵) x を (3) の S-解とすれば，命題の仮定より，次の等式が得られる．

(6)： $x(t) = (\mathcal{A}f)(t) + (\mathcal{G}\tilde{x})(t)$

作用素 $\mathcal{A}, \mathcal{G}$ は共に S-級であるから，両辺を確率積分すれば，$\tilde{x}(t)$ が方程式 (4) の解であることがわかる。このとき，対応 $x \longrightarrow y(t) = \tilde{x}(t)$ が一対一であることは上の (6) より従う。　逆に，(4) の乱関数解 $y(\cdot)$ が与えられたとき，

(7) $x(t) = (\mathcal{A}f)(t) + (\mathcal{G}y)(t)$ とおけば，

$x(\cdot)$ が S-級であること，及び (6) 式をみたすことに従って (4) の S-解であることがわかる．また このときの対応

$y(\cdot) \longrightarrow x(\cdot) = (\mathcal{A}f)(\cdot) + (\mathcal{G}y)(\cdot)$ が 一対一 で

ことも明らか。

核 $G(t,s,\omega)=\int_0^t g(u,s,\omega)\,d_\varphi Z(u)$ は (t,s) について連続であるから，殆んど全ての ω について $G(t,s,\omega)$ が与える $L^2(0,1)$ 上の作用素 G はコンパクトである。方程式 (4) に古典的な交代定理を適用し，命題 1 と組みあわせれば次の定理が得られる。

定理：（命題 1 と同じ仮定の下で），方程式 (3) が一意的な S-解をもつ為の必要十分条件は，方程式

$$(8),\quad x(t)=\int_0^1 K(t,s,\omega)\,x(s)\,d_\varphi Z(s)$$

が自明でない S-解を持たないことである。

§ 3. 一般の場合

コンパクトな作用素 $G(\omega)$ のスペクトルの集合を $Sp(\omega)$ で表わす。(8) が nontrivial S-解をもたない為の必要十分条件は，方程式 $y(t)=(Gy)(t)$ が

nontrivial solution をもたないことと同値である。
そこで，$\Sigma(G) \equiv \{a \in \mathbb{C} : P[a \in S_p(\omega)] > 0\}$ とおき，
新らたに次の仮定をおく.

(H.3) : (イ) $1 \notin \Sigma(G)$, (ロ) $P\{\tilde{K}(1.1) \neq 1\} = 1$

先の定理を方程式

(1)′, $x(t) = f(t) + \alpha(Lx)(t) + (\!(Kx)\!)(t)$

に適用して次の結果を得る。

__命題2__ ((H.1)〜(H.3)の下で) (1) で $\beta = 1$ とした方程式 (1)′ は
殆んど全ての数 α に対して一意的な S-解をもつ。

(∵) 実際，(1)′ に S-解 x があれば，仮定 (H.3) より，$x(\cdot)$ は次の方程式をみたすことがわかる.

(9) $x(t) = (\mathcal{C}f)(t) + \alpha(\mathcal{B}x)(t)$

ここに，

(10)-(i) $(\mathcal{C}f)(t) = f(t) + \{(I-G)^{-1}(\alpha f)^{\sim}\}(1)\cdot k(t.1)$
$- K_s((I-G)^{-1}(\alpha f)^{\sim})(t)$

(10)-(ii) $(\mathcal{B}x)(t) = \int_0^1 B(t.s.\omega)\,x(s)\,dS$

$$(10)-(\text{iii}). \quad B(t,s,\omega) = L(t,s,\omega) + \int_0^1 \{ \Gamma(1,u,\omega) K(t,1,\omega) - \int_0^1 k_s(t,v,\omega)\Gamma(v,u,\omega)\,dv \} (\Omega L)^{\sim}(u,s,\omega)\,du$$

但し，Γ は $(I-G)_\omega^{-1}$ の積分核である。

ところで，殆んど全ての ω に対して，作用素 $\mathcal{B}_\omega$ はコンパクトであるから，α を固有値の実現可能な値の集合 $\Sigma(\mathcal{B}) = \{ a \in \mathbb{C} : P\{ a \in S_p(\mathcal{B}_\omega)\} > 0 \}$ （高々可算集合）の外にとれば，(9)は ω 毎に一意的に解くことができて方程式(1)′の S-解を与えることがわかる。

最後に，積分方程式 (1)′ の近似についてふれておくことにする。(1)′ において，乱関数 Z を近似列 Z_n^{φ} でおきかえた方程式系を考える。

$$(11): \quad x_n(t) = f(t) + \alpha (L x_n)(t) + \int_0^1 K(t,s,\omega)\, x_n(s)\, d Z_n^{\varphi}(s).$$

次の記号を導入する。

- $H(t,s,\omega)$ に対して ${}^n\tilde{H}(t,s,\omega) \equiv \int_0^t H(u,s,\omega)\, d Z_n^{\varphi}(u)$.
- 核 $K(t,s)$ については，${}^n\tilde{K}(t,s,\omega) = K(t,s) Z_n^{\varphi}(t) - \int_0^t K_t(u,s) Z_n^{\varphi}(u)\,du$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \quad \tilde{K}(t,s,\omega) = \int_0^t K(u,s,\omega)\,dZ \quad (P\text{-a.s.})$$ であるから

$P(\tilde{K}(1.1)\neq 1)=1$ ならば，ω毎に，十分大きな n をとれば常に $"\tilde{K}(1.1)\neq 1$ $(P\text{-a.s.})$ とできる。同様に $(G_n y)(t) =$

$\int_0^1 "\tilde{g}(t.s.\omega)\, y(s)\, ds$ とおけば，$1 \notin \Sigma(G)$ $((H.3))$

ならば，$P[\ 1 \in Sp(G_n;\omega),\ n:\text{十分大}\ ]=0$ が成立つ。

それ故，これまでと類似の論に従えば，各ω毎に

十分大きな n とることにしておけば (11) 式は次の形に

直すことができる。

$$(12) \qquad x_n(t) = (\mathcal{G}_n f)(t) + \alpha(\mathcal{B}_n x_n)(t) \qquad (\forall n \geq N(\omega))$$

ここに

$$(13)\text{-(i)} \quad (\mathcal{G}_n f)(t) = f(t) + \{(I-G_n)^{-1}(\Omega f)^{"\sim}(1)\}\, K(t.1) - K_s\,((I-G_n)^{-1}(\Omega f)^{"\sim})(t)$$

$$\text{(ii)} \quad (\mathcal{B}_n x)(t) = \int_0^1 B_n(t.s.\omega)\, x(s)\, ds$$

$$\text{(iii)} \quad B_n(t.s.\omega) = L(t.s.\omega) + \int_0^1 \{\Gamma_n(1.u.\omega) K(t.1.\omega) - \int_0^1 K_s(t.v.\omega)\Gamma_n(v.u.\omega)\, dv\}(\Omega L)^{"\sim}(u.s.\omega)\, du$$

但し Γ_n は $(I-G_n)^{-1}$ $(n \geq N(\omega))$ の積分核である。

これらのことと，作用素 G，$\mathcal{B}$ のコンパクト性に留意

すれば次の結果に到る.

命題3. ((H.1)〜(H.3)の下で) 方程式(1)′が或るαに対してS-解$x^0(\cdot)$を持つとする。このとき,同じαに対応する方程式(11)が十分大きなn ($\geq N(\omega)$)に対して,常に一意的な解$x_n(\cdot)$をもち,この解は$n\to\infty$において$x^0(\cdot)$に強収束する。

Reference.

[1] OGAWA, S: "On a stochastic integral equation of Fredholm type (An application of the alternative theorem)" (1985) in preparation